Title	III型因子環の包含関係のテンソル積について (作用素環論の最近の話題 : 幾何学とのつながり)
Author(s)	幸崎, 秀樹
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1077: 140-141
Issue Date	1999-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/62643
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1077 巻 1999 年 140-141

III 型因子環の包含関係のテンソル積について

九州大学・大学院数理学研究科
幸崎 秀樹 (Hideki Kosaki)

指数有限な III 型因子環の対 $M \supseteq M_{-1}$ が与えられたとき、モジュラー自己同型群により接合積をとることにより得られる II_∞ 型フォンノイマン環の対 $\tilde{M} \supseteq \tilde{M}_{-1}$ および双対作用 θ_t^M は III 型因子環の部分因子環の研究の為に重要である。実際、 $\tilde{M}$ と $\tilde{M}_{-1}$ の中心が等しい場合 (ここでは、いつもこの条件を仮定するものとする)、ジョーンズ拡大をすることにより得られる相対可換子環のタワー $\{\tilde{M}_k \cap \tilde{M}'\}_{k=0,1,2,\cdots}$ とその上の双対作用のペアは部分因子環分類のための不変量として有用である (ロイ・ポパ・ウィンスロー氏等の一連の仕事)。部分因子環無しのときには (つまり、$M = M_{-1}$ のとき) 、これはコンヌ-竹崎の「荷重の流れ」に他ならないので、この不変量は部分因子環版荷重の流れと捉えることができ、便宜上我々は上のタワーと双対作用のペアを「部分因子環版荷重の流れ」と呼ぶことにしよう。

このような因子環の対 $M \supseteq M_{-1}$, $N \supseteq N_{-1}$ が二つ与えられたとき、テンソル積をとることにより得られる因子環の対 $M \otimes N \supseteq M_{-1} \otimes N_{-1}$ の部分因子環版荷重の流れがどのようなものか分かったので報告したい。部分因子環無しの場合 (つまり、$M = M_{-1}$, $N_{-1} = N$ の場合) 、これは III 型因子環のテンソル積の荷重の流れを調べることになり、このような研究は コンヌ-竹崎・岡-押川-浜地・岡-中神氏等により行われた。つまりここで報告する結果はこれら一連の研究の部分因子環版と考えることも可能である。

III_λ $(0 \leq \lambda < 1)$ 型因子環の二つ対 $M \supseteq M_{-1}$, $N \supseteq N_{-1}$ が与えられたとしよう。二つの相対可換子環 $\tilde{M}_k \cap \tilde{M}'$, $\tilde{N}_k \cap \tilde{N}'$ のテンソル積は実数の作用 $\theta_t^M \otimes \theta_{-t}^N$ を持つので、この作用に関する不動点環を考えることができる。またもう一つの実数の作用 $\theta_t^M \otimes id$ は先の作用と可換であるので不動点環への作用を誘導する。

定理： このようにして得られる不動点環と誘導された実数の作用のペアが丁度テンソル積をとることによって得られる因子環の対に対する部分因子環版荷重の流れである。

証明には、与えられた二つの因子環対の共通の離散接合積分解を利用するのが便利である。III_0 型の場合のときの証明の方がある意味では易しいのだが、その理由は離散接合積分解に現れる自己同型が中心上で自由だからである。一方、III_λ $(0 < \lambda < 1)$ 型のときには (中心上自由ということが使えない為) 少し工夫が必要となるが、III_0 型の場合と同じような考え方で証明可能である。

証明の為には、テンソル積から出発してモジュラー自己同型に関する接合積をとることにより得られる II_∞ 型フォンノイマン環を考え、このようなフォンノイマン環同士の相対可換子環を決定しなければばならない。離散接合積分解から出発する事のメリットはフォンノイマン環の任意の元が (L^2-収束の意味で) 「フーリエ展開」できるという点であり、相対可換子環を調べる際にフーリエ展開の係数を具体的に比較することが可能となる。従って、我々の証明は III_1 型の場合には破綻する。ただし、III_1 の場合には (セクターの議論により簡単に示せる) 次の状況が起きるので、実用上これで十分である： 最初に与えられた因子環の対の一つが III_1 型であり、その III 型グラフと II 型グラフが一致しているとする。(つまり、II 型タワー上で双対作用が自明ということである。) この場合、もう一方の因子環の対がどんなものであっても、テンソル積を取って得られる対 (これは自動的に III_1 型因子環の対となる) も同じ性質を持つ。

上の定理を使い、さまざまな (たとえば) III_λ 型の非分解的な (つまり、II_1 型因子環の対と III 型因子環のテンソル積の形に分解できない) 因子環の対ともう一つの因子環の対のテンソル積が、分解的なのかまたは非分解的なのかを決定することができる。実はこれだけならば泉氏による (ディセンデントセクターの中にモジュラー自己同型が現れるかどうかという) 判定条件 で十分なのだが、我々の定理は更に (非分離的な場合に) II 型グラフの決定を可能にする。たとえば、ディンキン図形 A_5 (したがって、指数は 3) に対応する III_λ 型パワーズ因子環の分解的な対と同じディンキン図形に対応する $III_{\lambda^{\frac{n}{m}}}$ 型パワーズ因子環の非分解的な対が与えられたとしよう。これらのテンソル積を考えることにより得られる因子環の対が非分離的である為の必要十分条件は m が偶数 (ただし、n と m は互いに素) ということである。この場合の II 型グラフはもちろん定理から計算できるが、実はこれは群 $S_3 \times \mathbf{Z}_3$ (対称群と巡回群の直積) とその部分群 S_2 から表現の誘導・制限の操作により得られるグラフである。